

## Тема 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИЗА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

### *Содержание*

- 6.1. Структура и параметры объектов проектирования
- 6.2. Особенности технологии автоматизированного проектирования
- 6.3. Постановка задач проектирования
- 6.4. Классификация математических моделей
- 6.5. Требования к математическому обеспечению
- 6.6. Иерархия математических моделей в САПР
- 6.7. Математические модели в процедурах анализа на макроуровне
- 6.8. Математическое обеспечение анализа на микроуровне
- 6.9. Математическое обеспечение анализа на системном уровне
- 6.10. Математическое обеспечение подсистем машинной графики и геометрического моделирования

При создании машин, технических комплексов и других объектов широко используется моделирование. Как средство познания и преобразования материального мира моделирование применяется в экспериментальных и теоретических научных исследованиях.

**Моделирование** представляет собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. **Модель** – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта. Удобство проведения исследований может определяться различными факторами: легкостью и доступностью получения информации, сокращением сроков и уменьшением материальных затрат на исследование и др.

Различают моделирование *предметное* и *абстрактное*. При *предметном моделировании* строят *физическую модель*, которая соответствующим образом отображает основные физические свойства и характеристики моделируемого объекта. При этом модель может иметь иную физическую природу в сравнении с моделируемым объектом (например, электронная модель гидравлической или механической системы). Если модель и объект одной и той же физической природы, то моделирование называют *физическим*.

Физическое моделирование широко применялось до недавнего времени при создании сложных технических объектов. Обычно изготавливался макетный или опытный образец технического объекта, проводились испытания, в процессе которых определялись его выходные параметры и характеристики, оценивались надежность функционирования и степень выполнения технических требований, предъявляемых к объекту. Если вариант технической разработки оказывался неудачным, все повторялось сначала, т.е. осуществлялось повторное проектирование, изготовление опытного образца, испытания и т.д.

Физическое моделирование сложных технических систем сопряжено с большими временными и материальными затратами.

*Абстрактное моделирование* связано с построением *абстрактной модели*. Такая модель представляет собой математические соотношения, графы, схемы, диаграммы и т. п.

Наиболее мощным и универсальным методом абстрактного моделирования является математическое моделирование. Оно широко используется как в научных исследованиях, так и при проектировании.

**Математическое моделирование** позволяет посредством математических символов и зависимостей составить описание функционирования технического объекта в окружающей внешней среде, определить выходные параметры и характеристики, получить оценку показателей эффективности и качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта. Применение математического моделирования при проектировании в большинстве случаев позволяет отказаться от физического моделирование, значительно сократить объемы испытаний и доводочных работ, обеспечить создание технических объектов с высокими показателями эффективности и качества. Одним из основных компонентов системы проектирования в этом случае становится математическая модель.

**Математическая модель** – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. В качестве математических объектов выступают числа, переменные, множества, векторы, матрицы и т.п. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется **математическим моделированием**. В конструкторской практике под математическим моделированием обычно понимается процесс построения математической модели, а проведение исследований на модели в процессе проектирования называют **вычислительным экспериментом**. Такое деление удобно для проектировщиков и функционально вполне обосновано, поэтому в дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

Для осуществления вычислительного эксперимента на ЭВМ необходимо разработать алгоритм реализации математической модели.

**Алгоритм** – это предписание, определяющее последовательность выполнения операций вычислительного процесса. *Алгоритм автоматизированного проектирования* представляет собой совокупность предписаний, обеспечивающих выполнение операций и процедур проектирования, необходимых для получения проектного решения. Для наглядности алгоритмы чаще всего представляют в виде схем или графов, иногда дают их вербальное (словесное) описание. Алгоритм, записанный в форме, воспринимаемой вычислительной машиной, представляет собой *программную модель*. Процесс программирования называют *программным моделированием*.

Формализация процесса проектирования на основе математического моделирования позволяет его автоматизировать. Одним из основных компонентов *системы автоматизированного проектирования (САПР)* является **математическое обеспечение**, включающее математические модели объектов проектирования и их элементов, методы и

алгоритмы выполнения проектных операций и процедур.

Развитие автоматизированного проектирования прошло несколько стадий. Вначале ЭВМ применялась лишь для выполнения вычислений по методикам, ориентированным на ручное решение. Это не вносило ничего нового в процесс проектирования, а лишь ускоряло выполнение отдельных его этапов. Затем начали использовать математические модели, позволяющие имитировать функционирование объектов проектирования, что позволило обеспечить повышение точности получаемой информации, организовать поиск оптимальных проектных решений и достичь универсальности описания отдельных проектных операций и процедур. Были разработаны единые подходы к получению математических моделей для целых классов технических объектов и эти подходы удалось формализовать. В результате процесс формирования математической модели оказалось возможным возложить непосредственно на ЭВМ. В дальнейшем основные усилия были направлены на разработку стратегии и методологии автоматизированного проектирования.

Полностью формализовать и автоматизировать процесс проектирования практически невозможно и нецелесообразно. На этапах разработки концепции технической системы, формирования технического задания, выбора технического решения; синтеза структуры, принятия решений и др. действия конструктора, основанные на его опыте и интуиции, как правило, непредсказуемы и не поддаются формализации. САПР предусматривает тесное взаимодействие человека и ЭВМ. Это один из основополагающих принципов построения САПР. Вместе с тем все виды проектных работ, которые можно формализовать, должны быть автоматизированы. В этой связи важнейшая роль принадлежит математическому моделированию. При создании САПР необходима не только математическая модель создаваемого технического объекта, но и модели реализации всех проектных операций и процедур.

Для разработки эффективной технологии автоматизированного проектирования необходимо детальное представление обо всех этапах и стадиях создания объекта с тем, чтобы осуществить их формализацию и математическое описание. Наибольший эффект может дать автоматизация самых ранних этапов проектирования, когда осуществляется выбор технического решения. САПР позволяет просмотреть множество вариантов и отобрать несколько наилучших для дальнейшей Детальной проработки и окончательного выбора. Как отмечал авиаконструктор П.О.Сухой, ошибку, допущенную при завязке проекта, уже не исправить совершенством инженерных расчетов и чертежными автоматами. Однако алгоритмы выполнения проектных работ на этих этапах и способы принятия решений еще недостаточно отработаны.

Высокий технический уровень изделия достигается в значительной мере на этапе функционального проектирования, на котором определяются основные параметры объекта.

Проектные решения при этом в значительной мере определяют его качества. При недостаточной проработке проекта затраты на обеспечение качества, обусловленные необходимостью последующей доводки конструкции, достигают 10... 20% от полной стоимости продукции. При этом 50...70% общих причин дефектов продукции связано с ошибками в проектно-конструкторских решениях, 20...30% с недостатками технологических процессов, 5...15% возникают по вине рабочих. Поэтому главная задача конструктора состоит в том, чтобы выявить и устранить потенциальные источники дефектов еще на стадии проектирования.

Операции и процедуры функционального проектирования, как правило, почти полностью поддаются формализации, что в конечном итоге создает необходимые условия для определения и выбора оптимальных параметров и структуры технического объекта. При этом используются математические модели создаваемых объектов, модели оценки и принятия решений, которые в виде соответствующих алгоритмов реализуются при проектировании.

При решении задач синтеза структуры, моделировании процессов функционирования объектов с переменной структурой возникает необходимость постоянного изменения математической модели.

На различных этапах и стадиях проектирования сложной технической системы используются различные математические модели. На ранних стадиях обычно модели простые, но чем подробнее проработка проекта, тем сложнее нужна модель. Математические модели могут представлять собой системы дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), системы алгебраических уравнений, простые алгебраические выражения, бинарные отношения, матрицы и др. Сложные модели требуют больших затрат времени на проведение вычислительных экспериментов. Системы уравнений таких моделей обычно отличаются плохой обусловленностью, что создает проблемы обеспечения устойчивости вычислительного процесса, достижения необходимой точности при приемлемых затратах времени.

Поскольку все проектные работы носят оптимизационный характер, то решать системы уравнений для получения искомого результата приходится многократно. Ситуация усугубляется также многомерностью и многокритериальностью задач. На заключительных этапах проектирования часто приходится использовать вероятностные модели, с тем чтобы исследовать процессы функционирования технической системы в условиях, максимально приближенных к реальным.

Если САПР потребует слишком больших затрат времени на разработку проекта изделия, то она вряд ли получит широкое практическое применение.

Отмеченные факторы указывают на необходимость поиска способов ускорения обработки информации и применения эффективных технологических маршрутов выполнения проектных работ. Глубокое знание этих вопросов и умение выбрать правильное решение при

создании САПР может принести значительный эффект в сокращении материальных и временных затрат на проектирование.

Приведены основные сведения о моделировании технических объектов применительно к современной методологии автоматизированного проектирования, дана классификация математических моделей.

При автоматизированном проектировании используются теоретические и экспериментальные, детерминированные и вероятностные, статические и динамические, структурные и функциональные модели и др.

Особое внимание уделено разработке алгоритмов формирования математических моделей сложных технических систем из моделей элементов, что позволяет автоматизировать процесс формирования и осуществлять его непосредственно на ЭВМ.

### **6.1. Структура и параметры объектов проектирования**

*Структура* – это упорядоченное множество элементов и их отношений.

Технический объект при системном подходе рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих элементов, составляющих упорядоченное множество.

*Структура технического объекта* характеризуется качественным и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми *параметрами элементов*.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды.

Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с техническим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

*Параметр* – это величина, характеризующая свойство или режим работы объекта. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. Следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, рабочая скорость, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость, габариты, масса, показатели надежности, показатели качества переходных процессов и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта*.

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. Различают внутренние и внешние параметры.

*Внутренние параметры* – это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Например, двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля. Выходные параметры их – мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии и одновременно это внутренние параметры автомобиля.

*Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры – свойства его элементов.*

При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

*Внешние параметры* – это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, внешней средой для автомобиля является дорога и воздушная среда. Параметры дороги: углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды: плотность и относительная влажность воздуха.

## **6.2. Особенности технологии автоматизированного проектирования**

Технология автоматизированного проектирования технических объектов базируется на изложенной в Теме 1 методологии. Схема типового маршрута проектирования технического объекта в среде САПР представлена на рис. 6.1. Основные компоненты маршрута предусматривают выполнение процедур анализа и синтеза, выступающих в диалектическом единстве.

*Анализ технического объекта* – это изучение его физических свойств, характеризуемых выходными параметрами. При анализе не создаются новые объекты, а исследуются заданные на основе изучения процессов их функционирования. Для этого проводятся вычислительные эксперименты с использованием математических моделей объектов.

*Синтез технического объекта* – это создание новых вариантов, обеспечивающих заданный алгоритм функционирования и выполнение технических требований к объекту.

Если определяют наилучшие в некотором смысле структуру и параметры, то синтез называют оптимизацией. При определении оптимальных значений параметров говорят о *параметрической оптимизации*. Задачу выбора оптимальной структуры называют *структурной оптимизацией*.

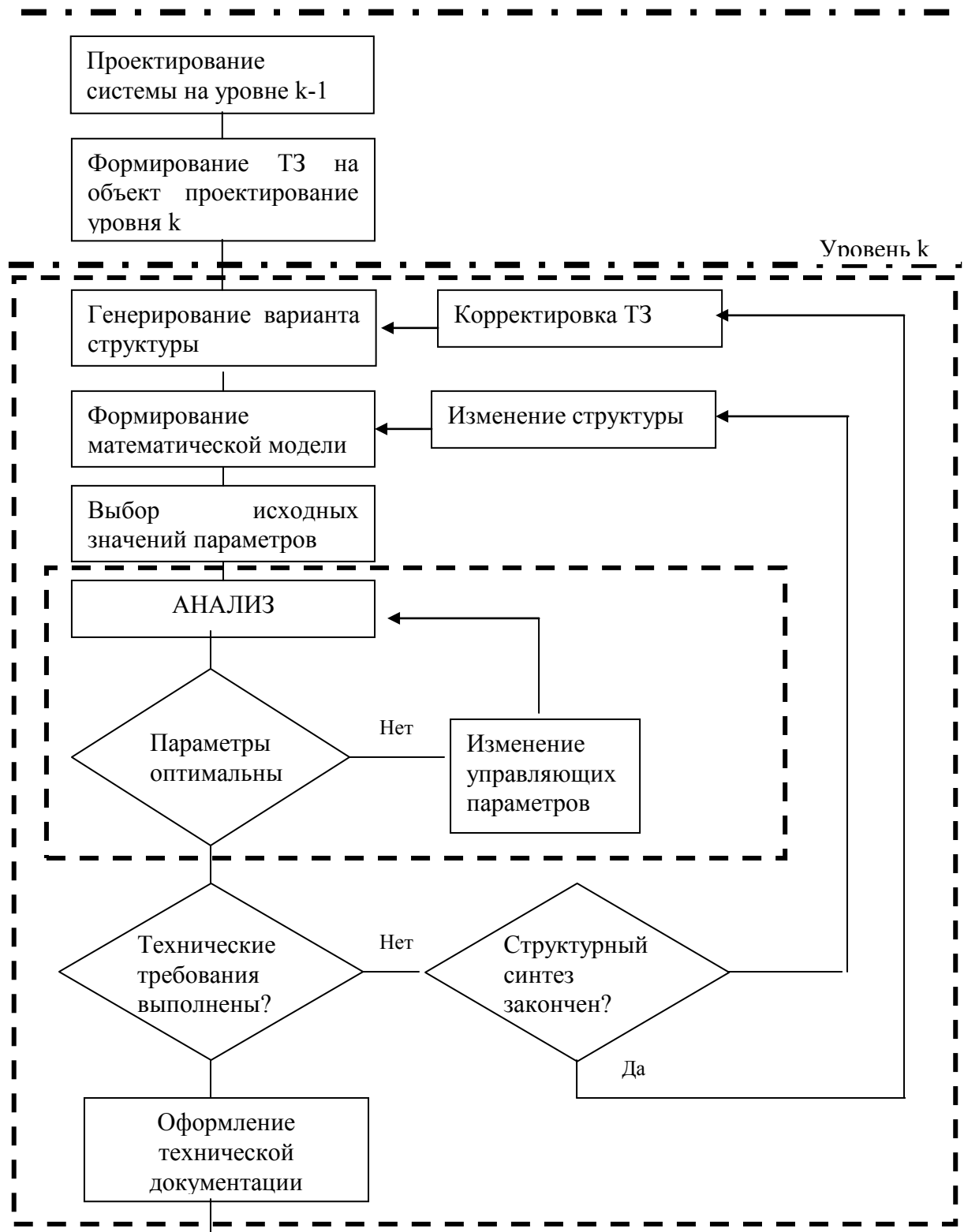


Рис. 6.1. Схема типового маршрут проектирования технического объекта в САПР

Декомпозиция и иерархичность процесса проектирования технического объекта обуславливают многообразие решаемых задач, их целей и используемых математических моделей на различных стадиях и этапах. Разнообразие учитываемых при этом физических свойств разделяет объекты на дискретные и непрерывные. Это различие определяется мощностью множества значений переменных, характеризующих количество вариантов

проектных решений. Если множество имеет мощность континуума, объект называют *непрерывным*, а если множество счетно - *дискретным*. Соответственно математические модели этих объектов называют непрерывными и дискретными.

В общем случае задачей синтеза является определение структуры и параметров технического объекта. В связи с различием математических моделей непрерывных и дискретных объектов методы решения задач их синтеза различны.

Рассмотрим подробнее проектирование непрерывного объекта на основе маршрута, приведенного на рис. 6.1. Объектом проектирования может быть любой элемент технического объекта, выделенный в результате декомпозиции.

Формализовать и автоматизировать процедуру синтеза структуры в большинстве случаев весьма сложно, поэтому синтез структуры объекта обычно осуществляется путем перебора возможных вариантов, генерируемых эвристическими методами. Для каждого варианта структуры формируется своя математическая модель и выбираются исходные значения внутренних параметров. Сравнивать альтернативные варианты структур можно лишь после определения оптимальных параметров элементов объекта. При этом для каждого варианта осуществляется имитация процесса функционирования объекта и определяются его *выходные параметры* – *показатели качества и эффективности*, которые используются для оценки оптимальности анализируемого варианта.

Математические описания элементов структуры проектируемого объекта известны и хранятся в базе данных. В результате формирование математической модели представляет собой по существу синтез абстрактной модели объекта. Процедура синтеза при этом легко формализуется и может быть автоматизирована.

Оптимизации подлежат обычно не все параметры объекта, а только некоторая их часть. Это обусловлено тем, что при проектировании технических объектов широко используются стандартные и унифицированные элементы, параметры которых не могут быть изменены. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

При проектировании часто ограничиваются сравнением нескольких альтернативных вариантов структур, а иногда поиск решения заканчивают, если найден вариант, удовлетворяющий заданным техническим требованиям. Такое проектное решение называют *допустимым*.

Если сравнивается ограниченное число вариантов структур, то основными компонентами технологического маршрута проектирования являются: синтез структуры, анализ и оптимизация параметров вариантов структур, процедура оценки и принятия решения.

### **6.3. Постановка задач проектирования**

Рассмотрим общие вопросы постановки задач проектирования, полагая, что



проектирование технического объекта осуществляется в среде САПР в соответствии со схемой типового маршрута, приведенной на рис. 6.1.

Техническое задание на проектирование обычно представляет собой вербальное (словесное) описание целей и задач проектирования данного объекта. Эти задачи, как отмечалось ранее, носят оптимизационный характер. Для осуществления проектирования конкретного технического объекта необходима его математическая модель и формализация понятия "оптимальный". В этом и заключается существо постановки задачи.

Результатом выполнения маршрута проектирования являются проектное решение и проектные документы, содержащие информацию о структуре и выходных параметрах технического объекта и о параметрах его элементов (внутренних параметрах объекта) при заданных внешних параметрах.

В общем случае задача проектирования имеет следующую математическую формулировку: *определить структуру и внутренние параметры технического объекта, доставляющие экстремум некоторой скалярной функции  $F(X)$  при заданных ограничениях  $\varphi(X) > 0$ ,  $\psi(X) = 0$ , где  $X$  – вектор оптимизируемых параметров.*

Функцию  $F(X)$  называют *целевой функцией* или *функцией качества*. Она количественно выражает качество технического объекта. Эффективность и качество функционирования объекта характеризуются его выходными параметрами, поэтому они выступают в роли *критериев оптимальности*. Так как физические свойства объекта характеризуются множеством выходных параметров, то задача оказывается многокритериальной.

Процедура постановки задачи проектирования носит неформальный характер и включает следующие этапы:

- выбор критериев оптимальности,
- формирование целевой функции,
- выбор управляемых (оптимизируемых) параметров,
- назначение ограничений,
- нормирование управляемых и выходных параметров.

Содержание этих этапов будет раскрыто позже при изучении методов оптимизации.

Многокритериальность задачи создает сложности формирования целевой функции и приводит к множеству возможных решений. Выделение некоторого подмножества решений задачи относится к проблеме выбора и принятия решения. *Задачей принятия решения* называют кортеж  $\acute{\alpha} = \langle W, \Theta \rangle$ , где  $W$  – множество вариантов решений задачи;  $\Theta$  – принцип оптимальности, дающий представление о качестве вариантов, в простейшем случае правило предпочтения вариантов. Решением задачи  $\acute{\alpha}$  называют множество  $W_{\text{ок}} \subseteq W$ , полученное на основе принципа оптимальности.

Задачи принятия решений классифицируют по наличию информации о множестве  $W$  и принципе оптимальности  $\Theta$ .

Если  $W$  и  $\Theta$  неизвестны, возникает *общая задача принятия решения*. Это наиболее сложная задача, так как данные для получения  $W_{ок}$  определяют в процессе ее решения. Задачу с известным  $\Theta$  называют *задачей выбора*, а задачу с известными  $W$  и  $\Theta$  – *задачей оптимизации*.

Построение  $W$  в общем случае является задачей выбора. Следовательно, общую задачу принятия решений можно свести к решению последовательных задач выбора. Информацию о физических свойствах вариантов  $W$  при этом доставляет ЭВМ, а выбор осуществляет *лицо, принимающее решение* (ЛПР), т.е. проектировщик.

Сложность задачи принятия решения обусловлена условиями неопределенности, характерными для начальных стадий проектирования технического объекта. Это приводит к необходимости многократного повторения процедур проектирования по мере раскрытия неопределенностей.

Раздел математической теории принятия решений в условиях неполной определенности называют *теорией статистических решений*.

#### **6.4. Классификация математических моделей**

При проектировании технических объектов используют множество видов математических моделей, в зависимости от Уровня иерархии, степени декомпозиции системы, аспекта, стадии и этапа проектирования.

На любом уровне иерархии объект проектирования представляют в виде некоторой системы, состоящей из элементов. В этой связи различают *математические модели элементов и систем*.

При переходе к более высокому иерархическому уровню блочного структурирования система низшего уровня становится элементом системы нового уровня, и наоборот, при переходе к низшему уровню элемент становится системой. В этом случае часто оказывается нецелесообразным использование одних и тех же видов математических моделей на разных уровнях. Обычно чем ниже уровень иерархии блочного структурирования технического объекта, тем более детальное описание его физических свойств. Следовательно, на низших уровнях используют наиболее сложные математические модели. На высших уровнях могут быть с успехом применены более простые модели. Их можно получить путем аппроксимации моделей низших иерархических уровней.

В общем случае уравнения математической модели связывают физические величины, которые характеризуют состояние объекта и не относятся к перечисленным выше выходным, внутренним и внешним параметрам. Такими величинами являются: скорости и силы – в механических системах; расходы и давления – в гидравлических и пневматических системах; температуры и тепловые потоки – в тепловых системах; токи и напряжения – в электрических

системах.

Величины, характеризующие состояние технического объекта в процессе его функционирования, называют *фазовыми переменными* (фазовыми координатами). Вектор фазовых переменных задает точку в пространстве, называемом *фазовым пространством*. Фазовое пространство, в отличие от геометрического, многомерное. Его размерность определяется количеством используемых фазовых координат.

Обычно в уравнениях математической модели фигурируют не все фазовые переменные, а только часть из них, достаточная для однозначной идентификации состояния объекта. Такие фазовые переменные называют *базисными координатами*. Через базисные координаты могут быть вычислены значения и всех остальных фазовых переменных.

Математические модели технических объектов, используемые при проектировании, предназначены для анализа процессов функционирования объектов и оценки их выходных параметров. Они должны отображать физические свойства объектов, существенные для решения конкретных задач проектирования. При этом математическая модель должна быть как можно проще, но в то же время обеспечивать адекватное описание анализируемого процесса.

Классификация математических моделей, используемых при проектировании технических систем, приведена на рис. 6.2.

В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных иерархических уровня: верхний или системный (метауровень); средний или макроуровень; нижний или микроуровень.

*Системный уровень (метауровень)* соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

На *макроуровне* объект проектирования рассматривают как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных элементов.



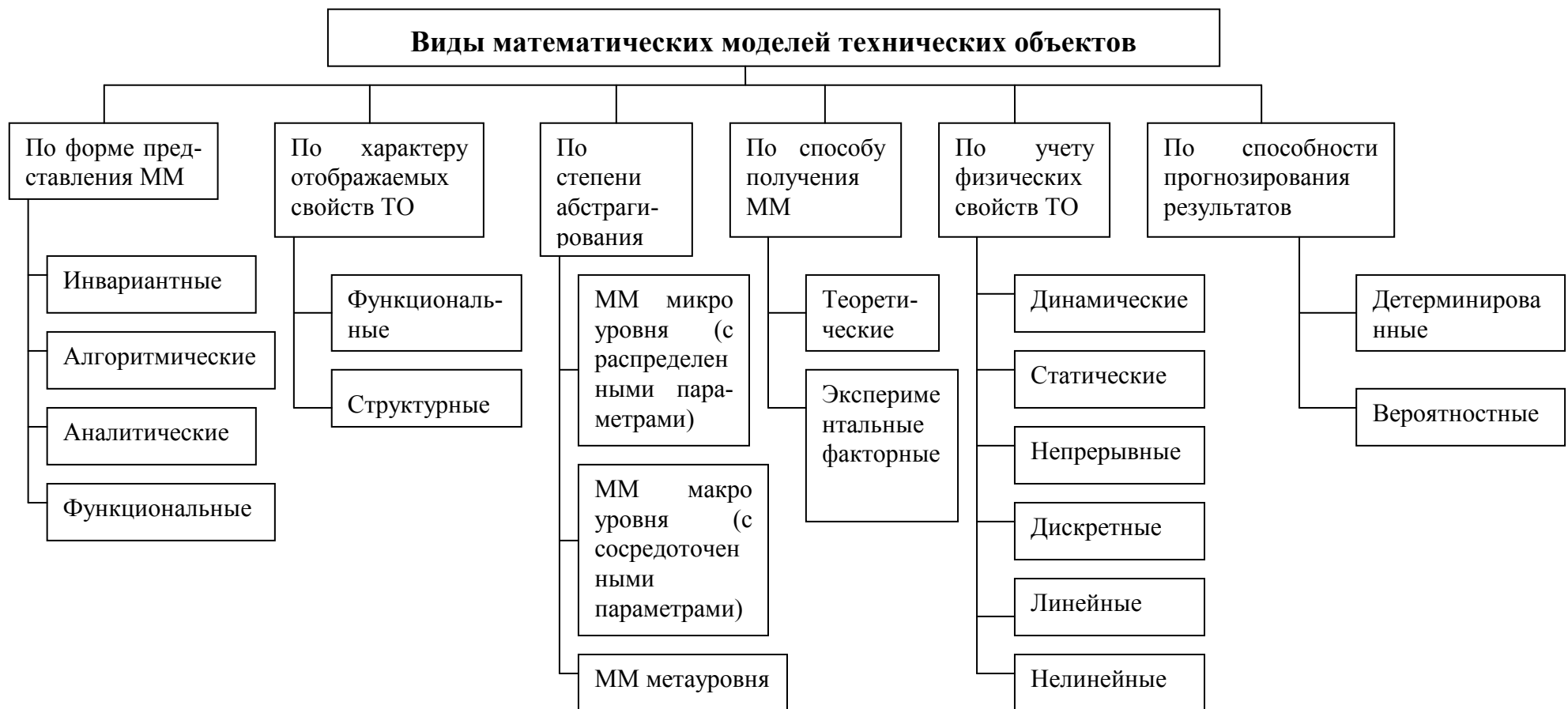


Рис.6.2 Классификация математических моделей



На *микроуровне* объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных. На микроуровне проектируют неделимые по функциональному признаку элементы технической системы, называемые *базовыми элементами*. Примерами таких элементов являются рамы, панели, корпусные детали, валы, диски фрикционных механизмов и др. Проектирование их основано на анализе сложно-напряженного состояния. При этом, естественно, базовый элемент рассматривается как система, состоящая из множества однотипных функциональных элементов одной и той же физической природы, взаимодействующих между собой и находящихся под воздействием внешней среды и других элементов технического объекта, также являющихся внешней средой по отношению к базовому элементу.

На всех рассмотренных иерархических уровнях используют следующие виды математических моделей: детерминированные и вероятностные, теоретические и экспериментальные факторные, линейные и нелинейные, динамические и статические, непрерывные и дискретные, функциональные и структурные.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования. В *инвариантной форме* математическая модель представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических), вне связи с методом решения этих уравнений.

В *алгоритмической форме* соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма – последовательности вычислений.

*Аналитическая модель* представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (обычно зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров). Такие модели получают на основе физических законов, либо в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы. К ним относятся также регрессионные модели, получаемые на основе результатов эксперимента.

*Графическая (схемная) модель* представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, диаграмм и т.п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей.

Среди алгоритмических моделей выделяют *имитационные модели*, предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при функционировании его под воздействием различных факторов внешней среды.

Математические модели могут представлять собой функциональные зависимости между выходными, внутренними и внешними параметрами:

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{X}, \vec{Q}) \quad (6.1)$$

где  $Y$ ,  $X$ ,  $Q$  – векторы выходных, внутренних и внешних параметров соответственно:

$$\vec{Y} = (y_j), j = \overline{1, m} \quad \vec{X} = (x_i), i = \overline{1, n} \quad \vec{Q} = (q_k), k = \overline{1, l};$$

$m$ ,  $n$ ,  $l$  – число выходных, внутренних и внешних параметров, соответственно;  $F(*)$  – вектор-функция.

Математическая модель вида (6.1) относится к *аналитической*. Она позволяет легко и просто решать задачи определения оптимальных параметров. Поэтому, если представляется возможность получения модели в таком виде, ее всегда целесообразно реализовать, даже если при этом придется выполнить ряд вспомогательных процедур. Такие модели обычно получают методом планирования эксперимента (вычислительного или физического).

Деление математических моделей на функциональные и структурные определяется характером отображаемых свойств технического объекта.

*Структурные модели* отображают только структуру объектов и используются при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого. Эти параметры называют *морфологическими переменными*. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов. Наиболее перспективно применение древовидных графов типа И-ИЛИ-дерева. Они позволяют аккумулировать накопленный опыт, используя описания всех существующих аналогов, известных из патентной литературы, и гипотетических объектов. Такие модели наиболее широко используют на метауровне при выборе технического решения.

*Функциональные модели* описывают процессы функционирования технических объектов и имеют форму систем уравнений. Они учитывают структурные и функциональные свойства объекта и позволяют решать задачи как параметрического, так и структурного синтеза. Их широко используют на всех иерархических уровнях, стадиях и этапах, при функциональном, конструкторском и технологическом проектировании. На метауровне функциональные модели позволяют решать задачи прогнозирования, на макроуровне – выбора структуры и оптимизации внутренних параметров технического объекта, на микроуровне – оптимизации параметров базовых элементов и несущих конструкций.

По способам получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

*Теоретические модели* получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а *экспериментальные* – на основе изучения поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как кибернетический "черный ящик", Эксперименты при этом



могут быть *физические* (на техническом объекте или его физической модели) или *вычислительные* (на теоретической математической модели).

При построении теоретических моделей используют физический и формальный подходы.

*Физический подход* сводится к непосредственному применению физических законов для описания объектов, например, законов Ньютона, Гука, Кирхгофа, Фурье и др.

*Формальный подход* использует общие математические принципы и применяется при построении как теоретических, так и экспериментальных моделей.

Построение теоретических, формальных моделей основано на вариационном принципе Гамильтона–Остроградского. Для динамических систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода.

Экспериментальные модели – формальные. Они не учитывают всего комплекса физических свойств элементов исследуемой технической системы, а лишь устанавливают обнаруживаемую в процессе эксперимента связь между отдельными параметрами системы, которые удастся варьировать и (или) осуществлять их измерение. Варьируемые параметры при этом называют факторами. Такие модели дают адекватное описание исследуемых процессов лишь в ограниченной области факторного пространства, в которой осуществлялось варьирование факторов в эксперименте. Поэтому экспериментальные математические модели носят частный характер, в то время как физические законы отражают общие закономерности явлений и процессов, протекающих как во всей технической системе, так и в каждом ее элементе в отдельности. Следовательно, экспериментальные факторные модели не могут быть приняты в качестве физических законов. Вместе с тем методы, применяемые для построения этих моделей (метод статистических испытаний, регрессионный анализ, корреляционный анализ, планирование эксперимента и др.), широко используются при проверке научных гипотез.

Функциональные математические модели могут быть линейные и нелинейные.

*Линейные модели* содержат только линейные функции фазовых переменных и их производных. Характеристики многих элементов реальных технических объектов нелинейные. Математические модели таких объектов включают нелинейные функции фазовых переменных и (или) их производных и относятся к *нелинейным*.

С целью упрощения задач проектирования на высших иерархических уровнях используют простые линейные модели. Если описание технического объекта представлено системой линейных, обыкновенных дифференциальных уравнений, то, применяя преобразование Лапласа, ее можно привести к системе алгебраических уравнений с комплексными переменными, решение которой значительно проще, чем исходной системы дифференциальных уравнений. Такой подход используется для построения математических

моделей на метауровне. В моделях макроуровня следует учитывать нелинейные свойства технического объекта.

Если при моделировании учитываются инерционные свойства технического объекта и (или) изменение во времени параметров объекта или внешней среды, то модель называют *динамической*. В противном случае модель *статическая*. Выбор динамической или статической модели определяется режимом работы технического объекта, положенным в основу проводимой процедуры анализа в маршруте проектирования. Большинство задач функционального проектирования требует использования динамических моделей. При конструкторском проектировании часто применяют статические модели, а динамические эффекты процесса функционирования объекта учитывают при формировании нагрузочных характеристик посредством коэффициентов динамичности, определяемых в процессе функционального проектирования.

Математическое представление динамической модели в общем случае может быть выражено системой дифференциальных уравнений, а статической – системой алгебраических уравнений. Динамическая модель может также представлять собой интегральные уравнения, передаточные функции, а в аналитической форме – явные зависимости фазовых координат или выходных параметров технического объекта от времени.

Воздействия внешней среды на технический объект носят случайный характер и описываются случайными функциями. При проектировании также учитывается случайный разброс параметров элементов объекта, обусловленный технологическим процессом изготовления. Все процессы, происходящие в объекте, также случайны и могут быть оценены вероятностными и статистическими характеристиками: вероятностью выполнения тех или иных требований, корреляционной функцией, спектральной плотностью, математическим ожиданием, дисперсией и др. Анализ функционирования объекта в этом случае требует построения *вероятностной математической модели*. Однако такая модель весьма сложная и ее использование при проектировании требует больших затрат машинного времени. Поэтому ее применяют чаще на заключительном этапе проектирования.

Большинство проектных процедур выполняется на детерминированных моделях. *Детерминированная математическая модель* характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие. В вычислительном эксперименте при проектировании обычно задают некоторые стандартные типовые воздействия на объект: *ступенчатыми, импульсными, гармоническими, кусочно-линейными, экспоненциальными* и др. Их называют *тестовыми воздействиями*.

## **6.5. Требования к математическому обеспечению**

При создании математического обеспечения САПР должны учитываться следующие

требования:

- \* алгоритмическая надежность,
- \* точность,
- \* адекватность,
- \* универсальность,
- \* экономичность (затраты машинного времени, используемая память).

*Алгоритмическая надежность* – свойство компонента МО давать при его применении и заранее определенных ограничениях правильные результаты. Количественной оценкой алгоритмической надежности служит вероятность получения правильных результатов при соблюдении оговоренных ограничений на применение метода. Если эта вероятность равна единице или близка к ней, то говорят, что метод алгоритмически надежен.

С проблемой алгоритмической надежности тесно связана проблема *устойчивости математических моделей и задач*. О плохой устойчивости говорят в случаях, когда малые погрешности исходных данных приводят к большим погрешностям результатов. Это приводит не только к снижению точности результатов проектирования, но и к росту затрат машинного времени. Для анализа и оптимизации объектов с неустойчивыми моделями необходимо применять специальные методы с повышенной алгоритмической надежностью.

*Точность* является наиболее важным свойством всех компонентов МО и определяет степень совпадения расчетных и истинных результатов. Алгоритмически надежные методы могут давать различную точность. И лишь в случаях, когда точность оказывается хуже предельно допустимых значений или решение вообще невозможно получить, говорят не о точности, а об алгоритмической надежности.

В большинстве случаев решение проектных задач характеризуется совместным использованием многих компонентов МО, что затрудняет оценку влияния погрешности отдельных компонентов. При необходимости оценки их точности проводят вычислительные эксперименты с использованием тестовых задач.

*Адекватность*. Модель считается адекватной, если отражает заданные свойства объекта с приемлемой точностью. Пусть  $\varepsilon_j$  – относительная погрешность модели по  $j$ -му выходному параметру:

$$\varepsilon_j = (\tilde{y}_j - y_j) / y_j,$$

где  $\tilde{y}_j$  –  $j$ -й выходной параметр, рассчитанный с помощью модели;  $y_j$  – тот же выходной параметр, имеющий место в моделируемом объекте.

Погрешность модели  $\varepsilon_m$  по совокупности учитываемых выходных параметров оценивается одной из норм вектора  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ , например

$$\varepsilon_m = \max_{j=1, \dots, m} |\varepsilon_j| \text{ или } \varepsilon_m = \sqrt{\sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2}.$$

Точность модели различна в разных условиях функционирования объекта. Эти условия характеризуются внешними параметрами. Если задаться предельной допустимой погрешностью  $\varepsilon_{\text{пред}}$ , то можно в пространстве внешних параметров выделить область, в которой выполняется условие

$$\varepsilon_m < \varepsilon_{\text{пред}}.$$

Эту область называют *областью адекватности* модели. Возможно введение индивидуальных предельных значений  $\varepsilon_{\text{пред } j}$  для каждого выходного параметра и определение области адекватности как области, в которой одновременно выполняются все  $m$  условий вида  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon_{\text{пред } j}$ .

Определение областей адекватности для конкретных моделей – сложная процедура, требующая больших вычислительных затрат. Эти затраты и трудности представления области адекватности быстро растут с увеличением размерности пространства внешних параметров. Определение области адекватности – более трудная задача, чем, например, задача параметрической оптимизации, поэтому для моделей вновь проектируемых объектов области адекватности не рассчитывают.

Однако для моделей унифицированных элементов расчет областей адекватности становится оправданным в связи с однократностью ее определения и многократностью их использования при проектировании различных систем. Знание области адекватности позволяет правильно выбирать модели элементов из числа имеющихся и тем самым повышать достоверность результатов машинных расчетов.

*Универсальность МО* определяет его применимость к широкому классу проектируемых объектов. Особенно это важно при создании комплексных САПР, включающих различные виды задач от конструирования изделия и проектирования технологических процессов до выбора режущего инструмента и проектирования конструкций специальной оснастки на основе анализа типовых технологических решений.

Универсальность МО делает удобным использование ЭВМ, упрощая методику автоматизированного проектирования. В то же время следует отметить, что универсальность не имеет количественной оценки. Реализуя ту или иную модель и метод, разработчик МО должен указать четкие границы их применимости. Если адекватность характеризуется положением и размерами области адекватности, то универсальность модели определяется числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров.

*Затраты машинного времени* во многом определяются сложностью проектируемых объектов и размерностью решаемых задач. Машинное время вычислительного процесса является главным ограничивающим фактором при попытках повысить сложность проектируемых на ЭВМ объектов.

Одним из путей сокращения сроков проектирования является применение в САПР

многопроцессорных вычислительных систем, обеспечивающих распараллеливание процесса вычисления. В связи с этим можно отметить, что важнейшим показателем *экономичности МО* является его приспособленность к распараллеливанию процесса проектирования.

*Используемая память* является вторым после затрат машинного времени показателем экономичности МО. Затраты памяти определяются длиной программы и объемом используемых массивов данных. Несмотря на значительное увеличение емкости оперативной памяти в современных ЭВМ, требования по затратам памяти остаются актуальными. Это связано с тем, что в мультипрограммном режиме функционирования ЭВМ задача с запросом большего объекта памяти получает более низкий приоритет, и в результате время ее пребывания в системе увеличивается и производительность процесса проектирования снижается.

В целях экономии затрат оперативной памяти используют внешнюю память (накопители на магнитных дисках, лентах, дискетах). Однако частые обращения к внешней памяти приводят к увеличению затрат машинного времени, поэтому при разработке методов проектирования, алгоритмов и программ приходится разрешать компромисс с целью рационального разделения процесса использования двух видов памяти ЭВМ.

## 6.6. Иерархия математических моделей в САПР

Блочно–иерархический подход к проектированию изделий машиностроения и технологии их изготовления включает в качестве своей основы иерархию математических моделей. Деление моделей по иерархическим уровням (уровням абстрагирования) происходит по степени детализации описываемых свойств и процессов, протекающих в объекте. При этом на каждом иерархическом уровне используют свои понятия "система" и "элементы". Так, система  $k$ -го уровня рассматривается как элемент на соседнем более высоком  $(k+1)$ -м уровне абстрагирования.

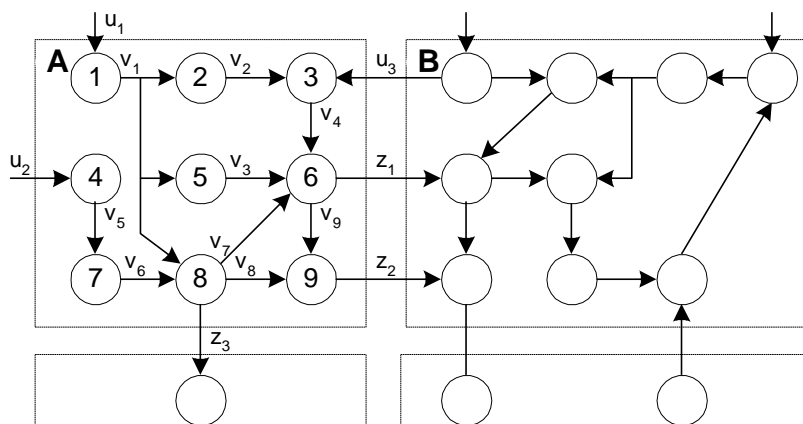


Рис. 6.3. Представление структуры объекта

Представим структуру некоторого объекта в виде множества элементов (рис. 6.3) и связей между ними. В качестве элементов объекта используются размерные и геометрические характеристики поверхности детали, параметры их качества температурные параметры,

технологические регламенты и др. Выделим в соответствии с блочно–иерархическим подходом в структуре объекта некоторые подмножества элементов и назовем их блоками (на рисунке показаны штриховыми линиями). Пусть состояние каждой связи характеризуется одной

фазовой переменной  $v_i$ ,  $z_j$  или  $u_k$ . Здесь  $v_i$  относится к внутренним связям между элементами данного блока,  $z_j$ ,  $u_k$  относятся к выходам и входам блока соответственно. Теперь поясним важные для функциональных моделей понятия полной модели и макромоделей.

*Полная модель* блока есть модель, составленная из моделей элементов с учетом межэлементных связей, т.е. модель, описывающая как состояние выходов, так и состояние каждого из элементов блока.

Моделями элементов блока  $A$  являются уравнения, связывающие входные и выходные переменные:

$$\left. \begin{aligned} f_1(v_1, u_1) &= 0; \\ f_2(v_1, u_2) &= 0; \\ f_3(v_2, u_3, v_4) &= 0; \\ \dots \\ f_9(v_9, v_8, z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Полная модель блока есть система уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \mathbf{0}, \mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{V}, \mathbf{U}), \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{U}$  – векторы внутренних, выходных и входных фазовых переменных блока.

При большом количестве элементов размерность вектора  $\mathbf{V}$  и порядок системы уравнений (6.3) становятся чрезмерно большими и требуются упрощения.

При переходе к более высокому иерархическому уровню упрощения основаны на исключении из модели вектора внутренних переменных  $\mathbf{V}$ . Полученная модель представляет собой систему уравнений

$$\Phi(\mathbf{Z}, \mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

существенно меньшей размерности, чем полная модель (6.3), и называется *макромоделью*. Следовательно, макро модель уже не описывает процессы внутри блока, а характеризует только процессы взаимодействия данного блока с другими в составе системы блоков.

Модели (6.3) и (6.4) относятся друг к другу как полная модель и макро модель на  $n$ -м уровне иерархии. На более высоком  $(n-1)$ -м уровне блок  $A$  рассматривается как элемент и макро модель (6.4) становится моделью элемента  $A$ . Следовательно, модели (6.2) и (6.4) относятся друг к другу как модели элементов соседних иерархических уровней. Из моделей типа (6.4) может быть составлена полная модель системы на  $(n-1)$ -м уровне.

### 6.7. Математические модели технических объектов на микроуровне

*Микроуровень* – это нижний иерархический уровень декомпозиции объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания. На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой, *динамические системы с распределенными параметрами*. Их также называют *непрерывными системами*. Функционирование этих систем описывается *дифференциальными уравнениями в частных производных*.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0 \quad (1)$$

или в компактной форме

$$L\varphi(\vec{Z}) = \theta(\vec{Z}) \quad (2)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор;  $\varphi$  – фазовая координата;  $x_i$  – пространственные координаты;  $n$  – количество пространственных координат;  $t$  – время;  $\vec{Z}$  – вектор независимых переменных;  $\theta(Z)$  – известная функция независимых координат.

*Независимыми переменными* в этих моделях являются пространственные координаты и время  $x_i, i=1, \dots, n$ . Фазовая координата – функция независимых переменных.

*Размерность задачи* определяется числом пространственных координат  $n$ : при  $n=1$  – объект одномерный; при  $n=2$  – двумерный; при  $n=3$  – трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида (1), если несколько фазовых переменных, т.е. вектор  $\Phi=(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , – то системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют *стационарной*, в противном случае – *нестационарной*. Стационарная задача характеризует *статическое состояние* технического объекта. *Динамические режимы* функционирования объекта относятся к нестационарным задачам и для их оценки требуются исследования *переходных процессов*.

Уравнение (1) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать *краевые условия*. Краевые условия включают граничные и начальные условия. *Граничные условия* – это сведения об искомым непрерывных функциях  $\varphi$  и (или) их производных на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$ , характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой. *Начальные условия* – это значения этих функций во всей области определения в начальный момент времени. Начальные условия

задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных (1) вместе с краевыми условиями носит название *дифференциальной краевой задачи* и представляет собой математическую модель технического объекта с распределенными параметрами.

Существует несколько стандартных способов задания граничных условий. Для теплового объекта, представляющего собой твердое гомогенное (однородное) тело, используют граничные условия первого, второго и третьего родов.

*Граничные условия первого рода* означают задание на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$  значений  $\varphi_s$  искомой функции фазовой переменной  $\varphi$ .

При *граничных условиях второго рода* задают на границе значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

*Граничные условия третьего рода* представляют собой уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

В некоторых случаях, например, для гетерогенных (неоднородных по составу материала) тепловых объектов, могут быть и иные граничные условия.

Состояние объекта характеризуется изменением во времени фазовых координат, определяемых в различных его точках. Задача анализа процесса функционирования технического объекта на микроуровне заключается в определении функций фазовых координат для множества точек, выделенных в области определения объекта.

Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов: корпуса, рамы, панели, валы, крылья самолетов, лопасти турбин и др. При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструктивных элементов, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа теплонапряженности деталей, выбора оптимальных размеров и конфигурации теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризующиеся скоростями и давлениями.

Обычно в исходные уравнения (1) входят не все фазовые координаты, характеризующие процессы функционирования технического объекта, а только базисные, например, деформации – в модели механической системы, температуры – в тепловой системе и т.д. Остальные фазовые



координаты (например, напряжения в упомянутых системах) определяют через базисные координаты на основе уравнений, устанавливающих между ними соответствующие связи.

Для построения математических моделей технических объектов с распределенными параметрами используют фундаментальные физические законы. К ним относятся, прежде всего, законы сохранения (массы, энергии, количества движения).

Общая формулировка закона сохранения: *изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока–стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.*

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} + G \quad (3)$$

где  $\varphi$  – фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию;  $\vec{J}$  – вектор плотности потока фазовой переменной;  $\operatorname{div} \vec{J}$  – дивергенция вектора  $\vec{J}$ ;  $G$  – скорость генерации или уничтожения субстанции.

У трехмерного технического объекта вектор  $\vec{J}$  состоит из трех составляющих, направленных параллельно осям декартовой системы координат  $x, y, z$ , т.е.  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ .

Дивергенция вектора  $\vec{J}$  – скалярная величина, определяемая выражением

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad (4)$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока–стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают: масса, энергия, количество движения и др.

## 6.8. Математические модели на макроуровне

На макроуровне осуществляют проектирование различных машин и механизмов. Объекты проектирования рассматриваются как сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов. Таким образом, в отличие от микроуровня, где объектами проектирования были детали машин (валы, корпуса, панели и т.п.), на макроуровне объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из элементов – объектов проектирования микроуровня.

На микроуровне использовались математические модели представляемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Эти модели универсальны, дают наиболее полное описание физических свойств и позволяют решать любые задачи анализа технического объекта. Однако они чрезвычайно сложны даже для отдельного элемента машины

или механизма и требуют значительных затрат времени на проведение анализа. Если рассматривать каждый элемент объекта макроуровня как сплошную среду, т.е. как динамическую систему с распределенными параметрами, то это сделает практически нереальным решение задач оптимизации структуры и параметров объекта.

Вместе с тем многие задачи проектирования успешно решаются с использованием более простых математических моделей. Эти модели можно получить путем аппроксимации распределенных моделей микроуровня на основе соответствующих допущений относительно представления структуры и физических свойств объекта. При этом динамическая система с распределенными параметрами путем дискретизации в пространственных координатах представляется совокупностью материальных объектов, выделенных из сплошной среды, – дискретных элементов с постоянными усредненными параметрами. Такую систему называют *динамической системой с сосредоточенными параметрами*.

Дискретный элемент в общем случае обладает инерционными, упругими и диссипативными свойствами (внутренние свойства системы). Различают простые и сложные элементы. *Простой элемент* наделен только одним из упомянутых физических свойств, а *сложный* – более чем одним.

Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами – система обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$dV/dt = F(V, t), \quad (5)$$

где  $V$  – вектор фазовых координат;  $t$  – независимая переменная – время.

Параметры элементов технического объекта  $X$  тоже входят в математическую модель (5), но только в качестве коэффициентов при переменных  $V$ .

Выходные параметры объекта  $Y$  непосредственно не фигурируют в системе (5). Они определяются по результатам решения  $V(t)$  системы уравнений. Большинство выходных параметров имеют смысл функционалов зависимостей фазовых координат  $\bar{Y} = \bar{\Phi}[\bar{V}(t)]$ .

Функционал представляет собой отображение класса функций в класс чисел. Примеры функционалов: определенные интегралы, экстремальные значения функций, значения функций при заданных значениях аргументов и т.п.

Система уравнений (5) описывает динамические режимы функционирования технического объекта. Анализ этих режимов заключается в решении системы уравнений (5) и последующем определении выходных параметров объекта. Задавая начальные условия  $V(0) = V_0$ , находят решения  $V(t)$ , а затем вычисляют значения выходных параметров  $Y$ , используемых в качестве критериев при оптимизации внутренних параметров объекта  $X$ .

*Критерии* – это показатели качества и эффективности технического объекта. Их подразделяют на следующие группы: назначения; надежности; экономного использования сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов (экономичности); ограничения

вредных воздействий продукции (экологические); безопасности; стандартизации и унификации.

Математическая модель в виде (5) непосредственно используется при анализе переходных процессов, устойчивости, стационарных режимов колебаний. Эта же модель позволяет решать и задачи анализа статических состояний.

Таким образом, объекты проектирования на макроуровне рассматриваются как системы, состоящие из совокупности взаимодействующих дискретных элементов. Задача проектирования таких объектов состоит в определении оптимальных параметров и структуры исходя из заданного описания внешней среды и технических требований к объекту.

При моделировании технических объектов на макроуровне они рассматриваются как динамические системы с сосредоточенными параметрами. Описание процессов их функционирования дается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении теоретических моделей используется два подхода: физический и формальный. *Физический подход* основан на непосредственном применении физических законов, а *формальный* использует общие математические принципы при описании физических свойств объектов. Общим в использовании обоих подходов является необходимость построения динамической модели объекта.

Структура динамической модели представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов, каждый из которых наделен соответствующими физическими свойствами. Набор элементов и их свойства определяются способом структурирования.

При формировании математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений используют следующие способы:

- узловой,
- контурный,
- метод переменных состояния,
- табличный метод.

Наибольшую известность и широкое применение получил *узловой метод*. Он основан на использовании топологических уравнений, выражающих условия равновесия потенциалов в узлах дискретизации динамической системы. Математическая модель объекта получается в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, искомыми неизвестными в которых являются фазовые переменные типа потока, характеризующие состояние сосредоточенных масс.

Узловой метод имеет ряд недостатков, осложняющих его использование для автоматизации формирования математической модели непосредственно на ЭВМ. Одним из недостатков метода является неудобная форма системы уравнений математической модели. Для использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений наиболее предпочтительно представление уравнений в нормальной форме Коши.

*Метод переменных состояния* ориентирован на получение математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Однако представление структуры динамической модели в этом методе гораздо сложнее, чем в узловом, и требует выполнения большого объема подготовительной работы, которая не поддается автоматизации.

*Табличный метод* использует исходные компонентные и топологические уравнения непосредственно, без каких-либо преобразований, поэтому автоматизировать его легко и просто. Однако математическая модель при этом получается высокого порядка и имеет избыточное число фазовых координат. Система уравнений оказывается переопределенной. Количество уравнений значительно превышает число степеней свободы системы. Это приводит к неустойчивости вычислительных алгоритмов при решении полученной системы уравнений.

*Контурный метод* применяется в электротехнике и строительной механике, где схемы взаимодействия конструктивных элементов образуют замкнутые контуры прохождения сигналов. Применение его для других технических объектов требует построения схемы замещения (эквивалентной схемы) и сопряжено со значительными сложностями формализации процесса составления математической модели.

При структурировании динамической модели *методом функционально законченных элементов* выделяемые дискретные элементы не обладают такой общностью, как в методе сосредоточенных масс или в сеточных методах. Количество выделяемых функционально законченных элементов и их свойства в конкретной предметной области определяются ее особенностями. Для описания элементов различных технических объектов используется множество разнообразных математических моделей. Это создает определенные преимущества при моделировании, так как исключаются любые ограничения на способы описания физических свойств элементов. Однако при этом теряется межпредметная унификация математических описаний, что требует создания и хранения в памяти ЭВМ библиотеки математических моделей элементов всех возможных технических объектов. Тем не менее, при создании специализированных САПР в конкретных технических областях часто отдается предпочтение методу функционально законченных элементов.

Широкое применение для построения математических моделей технических объектов находит *формальный подход*. Он основан на использовании интегральных вариационных принципов аналитической механики. Одним из наиболее мощных теоретических методов формального моделирования является вариационный принцип Гамильтона–Остроградского. Он применим к техническим объектам различной физической природы (механическим, гидравлическим, электрическим и др.).

Все упомянутые выше способы предназначены для получения математических моделей технических объектов в инвариантной форме. Эти модели представляют собой либо систему

компонентных и топологических уравнений, либо систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае при описании статических состояний технического объекта математической моделью в инвариантной форме является система алгебраических уравнений, получаемая путем соответствующих преобразований исходной системы дифференциальных уравнений.

### **6.9. Математическое обеспечение анализа на системном уровне**

Объектами проектирования на системном уровне являются такие сложные системы, как производственные предприятия, транспортные системы, вычислительные системы и сети, автоматизированные системы проектирования и управления и т.п. В этих приложениях анализ процессов функционирования систем связан с исследованием прохождения через систему потока заявок (иначе называемых требованиями или транзактами). Разработчиков подобных сложных систем интересуют прежде всего такие параметры, как производительность (пропускная способность) проектируемой системы, продолжительность обслуживания (задержки) заявок в системе, эффективность используемого в системе оборудования.

Заявками могут быть заказы на производство изделий, задачи, решаемые в вычислительной системе, клиенты в банках, грузы, поступающие на транспортировку и др. Очевидно, что параметры заявок, поступающих в систему, являются случайными величинами и при проектировании могут быть известны лишь их законы распределения и числовые характеристики этих распределений. Поэтому анализ функционирования на системном уровне, как правило, носит статистический характер. В качестве математического аппарата моделирования удобно принять *теорию массового обслуживания*, а в качестве моделей систем на этом уровне использовать *системы массового обслуживания* (СМО).

Типичными выходными параметрами в СМО являются числовые характеристики таких величин, как время обслуживания заявок в системе, длины очередей заявок на входах, время ожидания обслуживания в очередях, загрузка устройств системы, а также вероятность обслуживания в заданные сроки и т.п.

В простейшем случае СМО представляет собой некоторое средство (устройство), называемое *обслуживающим аппаратом*, вместе с очередями заявок на входах. Более сложные СМО состоят из многих взаимосвязанных обслуживающих аппаратов. Обслуживающие аппараты СМО в совокупности образуют *статические объекты* СМО, иначе называемые *ресурсами*. Например, в вычислительных сетях ресурсы представлены аппаратными и программными средствами.

В СМО, кроме статических объектов, фигурируют *динамические объекты* – транзакты. Например, в машиностроительном производстве динамическими объектами являются выполняемые на участке цеха операции обработки детали на оборудовании и запросы на ее обработку на станке.

Состояние СМО характеризуется состояниями составляющих ее объектов. Например, состояния обслуживающего аппарата выражаются булевыми величинами, значения которых интерпретируются как true (занято) и false (свободно), и длинами очередей на входах обслуживающего аппарата, принимающими неотрицательные целочисленные значения. Переменные, характеризующие состояние СМО, будем называть переменными состояния или фазовыми переменными.

Правило, согласно которому заявки выбирают из очередей на обслуживание, называют *дисциплиной обслуживания*, а величину, выражающую преимущественное право на обслуживание, – *приоритетом*. В *бесприоритетных дисциплинах* все транзакты имеют одинаковые приоритеты. Среди бесприоритетных дисциплин наиболее популярны дисциплины FIFO (первым пришел – первым обслужен), LIFO (последним пришел – первым обслужен) и со случайным выбором заявок из очередей.

В *приоритетных дисциплинах* для заявок каждого приоритета на входе обслуживающего аппарата выделяется своя очередь. Заявка из очереди с низким приоритетом поступает на обслуживание, если пусты очереди с более высоким приоритетом. Различают приоритеты абсолютные, относительные и динамические. Заявка из очереди с более высоким *абсолютным приоритетом*, поступая на вход занятого обслуживающего аппарата, прерывает уже начатое обслуживание заявки более низкого приоритета. В случае *относительного приоритета* прерывания не происходит, более высокоприоритетная заявка ждет окончания уже начатого обслуживания. *Динамические приоритеты* могут изменяться во время нахождения заявки в СМО.

Исследование поведения СМО, т.е. определение временных зависимостей переменных, характеризующих состояние СМО, при подаче на входы любых требуемых в соответствии с заданием на эксперимент потоков заявок, называют *имитационным моделированием* СМО. Имитационное моделирование проводят путем воспроизведения событий, происходящих одновременно или последовательно в модельном времени. При этом под событием понимают факт изменения значения любой фазовой переменной.

Подход, альтернативный имитационному моделированию, называют *аналитическим исследованием* СМО. Аналитическое исследование заключается в получении формул для расчета выходных параметров СМО с последующей подстановкой значений аргументов в эти формулы в каждом отдельном эксперименте.

*Модели* СМО, используемые при имитационном и аналитическом моделировании, называются *имитационными* и *аналитическими* соответственно.

Аналитические модели удобны в использовании, поскольку для аналитического моделирования не требуются сколько-нибудь значительные затраты вычислительных ресурсов, часто без постановки специальных вычислительных экспериментов разработчик может оценить

характер влияния аргументов на выходные параметры, выявить те или иные общие закономерности в поведении системы. Но, к сожалению, аналитическое исследование удается реализовать только для частных случаев сравнительно несложных СМО. Для сложных СМО аналитические модели если и удастся получить, то только при принятии упрощающих допущений, ставящих под сомнение адекватность модели.

Поэтому основным подходом к анализу САПР на системном уровне проектирования считают имитационное моделирование, а аналитическое исследование используют при предварительной оценке различных предлагаемых вариантов систем.

Некоторые компоненты СМО характеризуются более чем одним входным и (или) выходным потоками заявок. Правила выбора одного из возможных направлений движения заявок входят в соответствующие модели компонентов. В одних случаях такие правила относятся к исходным данным (например, выбор направления по вероятности), но в некоторых случаях желательно найти оптимальное управление потоками в узлах разветвления. Тогда задача моделирования становится более сложной задачей синтеза, характерными примерами являются маршрутизация заявок или синтез расписаний и планов.

## **6.10. Математическое обеспечение подсистем машинной графики и геометрического моделирования**

### **6.10.1. Компоненты математического обеспечения**

Подсистемы машинной графики и геометрического моделирования (МГиГМ) занимают центральное место в машиностроительных САПР конструкторской подготовки производства (САПР-К). Конструирование изделий в них, как правило, проводится в интерактивном режиме при оперировании геометрическими моделями, т.е. математическими объектами, отображающими форму деталей, состав сборочных узлов и возможно некоторые дополнительные параметры (масса, момент инерции, цвета поверхности и т.п.).

В подсистемах МГиГМ типичный маршрут обработки данных включает в себя получение проектного решения в прикладной программе, его представление в виде геометрической модели (геометрическое моделирование), подготовку проектного решения к визуализации, собственно визуализацию в аппаратуре рабочей станции и при необходимости корректировку решения в интерактивном режиме. Две последние операции реализуются на базе аппаратных средств машинной графики. Когда говорят о *математическом обеспечении МГиГМ*, имеют в виду прежде всего модели, методы и алгоритмы для геометрического моделирования и подготовки к визуализации. При этом часто именно математическое обеспечение подготовки к визуализации называют математическим обеспечением машинной графики.

Различают математическое обеспечение двумерного (*2D*) и трехмерного (*3D*) моделирования. Основные применения *2D* графики – подготовка чертежной документации в

машиностроительных САПР. В развитых машиностроительных САПР используют как *2D*, так и *3D* моделирование для синтеза конструкций, представления траекторий рабочих органов станков при обработке заготовок, генерации сетки конечных элементов при анализе прочности и т.п.

В *3D* моделировании различают модели каркасные (проволочные), поверхностные, твердотельные (объемные).

*Каркасная модель* представляет форму детали в виде конечного множества линий, лежащих на поверхностях детали. Для каждой линии известны координаты концевых точек и указана их инцидентность ребрам или поверхностям. Оперировать каркасной моделью на дальнейших операциях маршрутов проектирования неудобно, и поэтому каркасные модели в настоящее время используют редко.

*Поверхностная модель* отображает форму детали с помощью задания ограничивающих ее поверхностей, например, в виде совокупности данных о гранях, ребрах и вершинах.

Особое место занимают модели деталей с поверхностями сложной формы, так называемыми *скульптурными поверхностями*. К таким деталям относятся корпуса многих транспортных средств (например, судов, автомобилей), детали, обтекаемые потоками жидкостей и газов (лопатки турбин, крылья самолетов) и др.

*Твердотельные модели* отличаются тем, что в них в явной форме содержатся сведения о принадлежности элементов внутреннему или внешнему по отношению к детали пространству.

В настоящее время применяют следующие подходы к построению геометрических моделей.

1. Задание граничных элементов – граней, ребер, вершин.
2. *Кинематический метод*, согласно которому задают двумерный контур и траекторию его перемещения; след от перемещения контура принимают в качестве поверхности детали.
3. *Позиционный подход*, в соответствии с которым рассматриваемое пространство разбивают на ячейки (позиции) и деталь задают указанием ячеек, принадлежащих детали; очевидна громоздкость этого подхода.
4. Представление сложной детали в виде совокупностей *базовых элементов формы* (БЭФ) и выполняемых над ними теоретико-множественных операций. К БЭФ относятся заранее разработанные модели простых тел, это, в первую очередь, модели параллелепипеда, цилиндра, сферы, призмы. Типичными теоретико-множественными операциями являются объединение, пересечение, разность. Например, модель плиты с отверстием в ней может быть получена вычитанием цилиндра из параллелепипеда.

Метод на основе БЭФ часто называют *методом конструктивной геометрии*. Это основной способ конструирования сборочных узлов в современных САПР-К.

В памяти ЭВМ рассмотренные модели обычно хранятся в векторной форме, т.е. в виде



координат точек, задающих элементы модели. Выполнение операций конструирования также выполняется над моделями в векторной форме. Наиболее компактна модель в виде совокупности связанных БЭФ, которая преимущественно и используется для хранения и обработки информации об изделиях в системах конструктивной геометрии.

Однако для визуализации в современных рабочих станциях в связи с использованием в них растровых дисплеев необходима *растеризация* – преобразование модели в растровую форму. Обратную операцию перехода к векторной форме, которая характеризуется меньшими затратами памяти, называют *векторизацией*. В частности, векторизация должна выполняться по отношению к данным, получаемым сканированием изображений в устройствах автоматического ввода.

### 6.10.2. Геометрические модели

Важной составной частью геометрических моделей является описание поверхностей. Если поверхности детали – плоские грани, то модель может быть выражена достаточно просто определенной информацией о гранях, ребрах, вершинах детали. При этом обычно используется метод конструктивной геометрии. Представление с помощью плоских граней имеет место и в случае более сложных поверхностей, если эти поверхности аппроксимировать множествами плоских участков – полигональными сетками. Тогда можно поверхностную модель задать одной из следующих форм:

1) модель есть список граней, каждая грань представлена упорядоченным списком вершин (циклом вершин); эта форма характеризуется значительной избыточностью, так как каждая вершина повторяется в нескольких списках;

2) модель есть список ребер, для каждого ребра заданы инцидентные вершины и грани.

Однако аппроксимация полигональными сетками при больших размерах ячеек сетки дает заметные искажения формы, а при малых размерах ячеек оказывается неэффективной по вычислительным затратам. Поэтому более популярны описания неплоских поверхностей кубическими уравнениями в форме Безье или *B*-сплайнов.

Знакомство с этими формами удобно выполнить, показав их применение для описания геометрических объектов первого уровня – пространственных кривых.

Примечание. Геометрическими объектами нулевого, первого и второго уровней называют соответственно точки, кривые, поверхности.

В подсистемах МГиГМ используются параметрически задаваемые кубические кривые

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x, \\y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y, \\z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $0 \leq t \leq 1$ . Такими кривыми описывают сегменты аппроксимируемой кривой, т.е. аппроксимируемую кривую разбивают на сегменты и каждый сегмент аппроксимируют

уравнениями (6).

Применение кубических кривых обеспечивает (соответствующим выбором четырех коэффициентов в каждом из трех уравнений) выполнение четырех условий сопряжения сегментов. В случае кривых Безье этими условиями являются прохождение кривой сегмента через две заданные конечные точки и равенство в этих точках касательных векторов соседних сегментов. В случае  $B$ -сплайнов выполняются условия непрерывности касательного вектора и кривизны (т.е. первой и второй производных) в двух конечных точках, что обеспечивает высокую степень «гладкости» кривой, хотя прохождение аппроксимирующей кривой через заданные точки здесь не обеспечивается. Применение полиномов выше третьей степени не рекомендуется, так как велика вероятность появления «волнистости».

В случае формы Безье коэффициенты в (6) определяются, во-первых, подстановкой в (6) значений  $t = 0$  и  $t = 1$  и координат заданных конечных точек  $P_1$  и  $P_4$ , соответственно, во-вторых, подстановкой в выражения производных

$$\begin{aligned} dx/dt &= 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x, \\ dy/dt &= 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y, \\ dz/dt &= 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z, \end{aligned}$$

тех же значений  $t = 0$  и  $t = 1$  и координат точек  $P_2$  и  $P_3$ , задающих направления касательных векторов (рис. 6.4). В результате для формы Безье получаем

$$x(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_x, \quad y(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_y, \quad z(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_z, \quad (7)$$

где  $\mathbf{T}^T = (t^3, t^2, t, 1)$  – вектор-строка, матрица  $\mathbf{M}$  представлена в табл. 1,  $\mathbf{G}_x$  – вектор координат  $P_{xi}$ , точек  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$ , аналогично  $\mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$  – векторы координат  $P_{yi}, P_{zi}$  тех же точек.

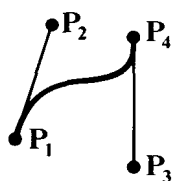


Таблица 1

-1/6	1/2	-1/2	1/6
1/2	-1	1/2	0
-1/2	0	1/2	0
1/6	2/3	1/6	0

Таблица 2

-1	3	-3	1
3	-6	3	0
-3	3	0	0
1	0	0	0

Рис. 6.4. Кривая Безье

В случае  $B$ -сплайнов аппроксимируемая кривая делится на  $n$  участков, выделяемых последовательными точками  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ . Участок между парой соседних точек  $P_i, P_{i+1}$  аппроксимируется  $B$ -сплайном, построенным с использованием четырех точек  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ .  $B$ -сплайн на участке  $[P_i, P_{i+1}]$  может быть представлен выражениями, аналогичными (7),

$$x(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_x, \quad y(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_y, \quad z(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{G}_z,$$

для которых матрица  $\mathbf{M}$  имеет иной вид и представлена в табл. 2, а векторы  $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$  содержат соответствующие координаты точек  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ .

Аналогично можно получить выражения для форм Безье и  $B$ -сплайнов применительно к поверхностям с учетом того, что вместо (6) используются кубические зависимости от двух

переменных.

### 6.10.3. Методы и алгоритмы машинной графики (подготовки к визуализации)

К методам машинной графики относят методы:

- преобразования графических объектов,
- представления (развертки) линий в растровой форме,
- выделения окна,
- удаления скрытых линий,
- проецирования,
- закраски изображений.

*Преобразования графических объектов* выполняются с помощью операций переноса, масштабирования, поворота.

Перенос точки из положения  $P$  в новое положение  $C$  можно выполнять по формулам типа

$$C_{xi} = P_{xi} + \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i$  – приращение по координате  $x_i$ . Однако удобнее операции преобразования представлять в единой матричной форме

$$C = P \cdot T, \quad (8)$$

где  $T$  – преобразующая матрица. При этом точки  $C$  и  $P$  в двумерном случае изображают векторами-строками  $1 \times 3$ , в которых кроме значений двух координат, называемых при таком представлении однородными, дополнительно указывают масштабный множитель  $W$ . Тогда перенос для случая  $2D$  можно выразить в виде (8), где  $T$  представляет собой табл. 3, а  $W=1$ .

Таблица 3

1	0	0
0	1	0
$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	1

Таблица 4

$m_x$	0	0
0	$m_y$	0
0	0	1

Таблица 5

$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
0	0	1

Для операций масштабирования и поворота матрицы  $T$  представлены в табл. 4 и 5 соответственно, где  $m_x$ ,  $m_y$  – масштабные множители,  $\varphi$  – угол поворота.

Удобство (8) объясняется тем, что любую комбинацию элементарных преобразований можно описать формулой (8). Например, выражение для сдвига с одновременным поворотом имеет вид

$$C = P \cdot T_{cd} \cdot T_{пов} = P \cdot T,$$

где  $T = T_{cd} \cdot T_{пов}$ ,  $T_{cd}$  – матрица сдвига,  $T_{пов}$  – матрица поворота.

*Представление графических элементов в растровой форме* требуется для отображения этих элементов на битовую карту растровой видеосистемы. Пусть требуется развернуть отрезок  $AB$  прямой  $y = ax + b$ . Введем обозначения:  $A=(x_a, y_a)$ ,  $B=(x_b, y_b)$ ; за величину дискрета (пиксела) примем единицу. В алгоритме развертки номера строк и столбцов карты, на

пересечении которых должны находиться точки отрезка, определяются следующим образом:

$$1) \Delta x := xb - xa;$$

$$\Delta y := yb - ya;$$

$$x := xa;$$

$$y := ya;$$

$$2) d := 2\Delta y - \Delta x;$$

$$3) \text{если } d > 0, \text{ то } \{y := y + 1; d := d + 2(\Delta y - \Delta x)\};$$

$$\text{иначе } d := d + 2\Delta y;$$

$$4) x := x + 1;$$

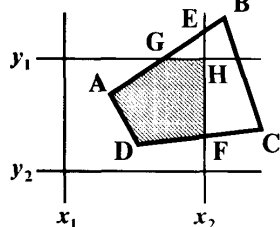
5) переход к пункту 3, пока не достигнута точка **B**.

Экономичность этого алгоритма обуславливается отсутствием длинных арифметических операций типа умножения.

*Выделение окна* требуется при определении той части сцены, которая должна быть выведена на экран дисплея.

Пусть окно ограничено линиями  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ,  $y = y_1$ ,  $y = y_2$  (рис. 6.5). Поочередно для каждого многоугольника проверяется расположение его вершин и ребер относительно границ окна. Так, для многоугольника **ABCD** (см. рис. 6.5) при отсечении по границе  $x = x_2$  просматривается множество вершин в порядке обхода по часовой стрелке. Возможны четыре ситуации для двух последовательных вершин **P** и **R**:

Рис. 6.5. Выделение окна



1) если  $x_P > x_2$  и  $x_R > x_2$ , то обе вершины и инцидентное им ребро находятся вне окна и исключаются из дальнейшего анализа;

2) если  $x_P \leq x_2$  и  $x_R \leq x_2$ , то обе вершины и инцидентное им ребро остаются для дальнейшего анализа;

3) если  $x_P \leq x_2$  и  $x_R > x_2$ , то вершина **P** остается в списке вершин, а вершина **R** заменяется новой вершиной с координатами  $x = x_2$ ,  $y = y_P + (y_R - y_P)(x_2 - x_P) / (x_R - x_P)$ ; в нашем примере такой новой вершиной будет **E** (вместо **B**);

4) если  $x_P > x_2$  и  $x_R \leq x_2$ , то вершина **P** заменяется новой вершиной с координатами  $x = x_2$ ,  $y = y_P + (y_P - y_R)(x_2 - x_R) / (x_P - x_R)$ , а вершина **R** остается в списке вершин; в нашем примере новой вершиной будет **F** (вместо **C**).

После окончания просмотра применительно ко всем границам в окне оказываются оставшиеся в списке вершины.

Применяя эти правила в нашем примере, получаем сначала многоугольник **AEFD**, а после отсечения по верхней границе  $y = y_2$  — многоугольник **AGFD** (см. рис. 6.5). Однако правильный результат несколько иной, а именно многоугольник **AGHFD**. Этот правильный результат получается при двойном обходе вершин сначала по часовой стрелке, затем против с

включением в список новых вершин, появляющихся при каждом обходе.

Применяют ряд алгоритмов *удаления скрытых линий*. Один из наиболее просто реализуемых алгоритмов – алгоритм *z-буфера*, где *z-буфер* – область памяти, число ячеек в которой равно числу пикселей в окне вывода. Предполагается, что ось *z* направлена по нормали к видовой поверхности и наблюдатель расположен в точке  $z = 0$ .

В начале исполнения алгоритма все пиксеты соответствуют максимальному значению *z*, т.е. максимальному удалению от наблюдателя, что приводит к помещению во все ячейки *z-буфера* значений пикселей фона картины (чертежа). Далее поочередно для всех точек граней рассчитываются значения координаты *z*. Среди точек, относящихся к одному и тому же пикселу (одной и той же ячейке *z-буфера S*), выбирается точка с наименьшим значением *z* и ее код (т.е. цвет и яркость) помещается в *S*. В итоге *z-буфер* будет содержать пиксеты наиболее близких к наблюдателю граней.

*Алгоритмы построения проекций* преобразуют трехмерные изображения в двумерные. В случае построения центральной проекции каждая точка трехмерного изображения отображается на картинную поверхность путем пересчета координат *x* и *y* (рис. 6.6). Так, координату  $x'_a$  точки  $A'$  вычисляют по очевидной формуле

$$x'_a = x_a (d/z),$$

аналогично рассчитывается координата  $y'_a$  точки  $A'$ .

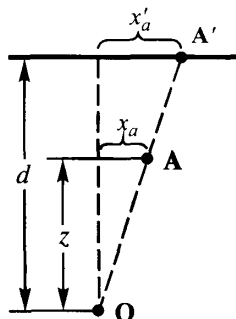


Рис. 6.6. Построение центральной проекции точки *A*

В параллельных проекциях  $d \rightarrow \infty$  и координаты *x* и *y* точек  $A'$  и *A* совпадают. Поэтому построение параллельных проекций сводится к выделению окна, при необходимости к повороту изображения и, возможно, к удалению скрытых линий.

*Закраска матовых поверхностей* основана на законе Ламберта, согласно которому яркость отраженного от поверхности света пропорциональна  $\cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между нормалью к поверхности и направлением луча падающего света. В алгоритме Гуро яркость внутренних точек определяется линейной интерполяцией яркости в вершинах многоугольника. При этом сначала проводится интерполяция в точках ребер, а затем по строкам горизонтальной развертки. Более реалистичными получаются изображения в алгоритме Фонга, основанном на линейной интерполяции векторов нормалей к поверхности.

#### 6.10.4. Программно-методические комплексы геометрического моделирования и машинной графики

Мировыми лидерами в этой области программного обеспечения САПР считаются .Pro/Engineer, Unigraphics, EUCLID, CADD5, CATIA, I-DEAS и ряд других. Отметим, что по своим функциональным возможностям эти комплексы приблизительно равноценны, новые

достижения, появившиеся в одном из них, в скором времени реализуются в новых версиях других комплексов. Поэтому для первого знакомства достаточно рассмотреть характеристики одного из комплексов. Ниже приведены краткие сведения по комплексу Pro/Engineer.

Комплекс насчитывает несколько десятков программ (модулей), которые разделены на группы программ конструкторского проектирования механических объектов, промышленного дизайна, функционального моделирования, технологического проектирования, обмена данными.

Базовые модули конструкторского проектирования предназначены для твердотельного и поверхностного моделирования, синтеза конструкций из базовых элементов формы, эти модули поддерживают параметризацию и ассоциативность, проекционное черчение, выполняют разработку чертежей с простановкой размеров и допусков. Пользователь может пополнять библиотеку БЭФ оригинальными моделями. Синтез трехмерных моделей сложной формы возможен вытягиванием плоского контура по нормали к его плоскости, его протягиванием вдоль произвольной пространственной кривой, вращением контура вокруг заданной оси, натягиванием между несколькими заданными сечениями. Синтез сборок выполняется вызовом или ссылкой на библиотечные элементы, их модификацией, разработкой новых деталей. Детали сборки можно нужным образом ориентировать в пространстве. Далее следует ввести ассоциативные (сопрягающие) связи.

Дополнительные модули конструкторского проектирования имеют более конкретную, но узкую специализацию. Примерами таких модулей могут служить модули конструирования панелей из композитных материалов, разработки штампов и литейных пресс-форм, трубопроводных систем, сварных конструкций, разводки электрических кабелей и жгутов.

Модули функционального моделирования используются как препроцессоры и постпроцессоры для программ конечно-элементного анализа (нанесение сетки конечных элементов, визуализация результатов анализа), для анализа теплового состояния конструкций, для оценки виброустойчивости и др.

Основные модули технологического проектирования служат для моделирования технологических процессов фрезерной, токарной, электроэрозионной обработки и для разработки постпроцессоров для систем управления оборудованием с ЧПУ.

Среди модулей обмена данными важно наличие взаимосвязей по стандарту STEP, что открывает возможности импорта/экспорта данных с различными CAE/CAD/CAM системами, поддерживающими этот стандарт.